数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 205-209

『綴術算経』の「探算脱術第七」について

小川束 (四日市大学)*

はじめに

『綴術算経』[1]第七章または『不休綴術』[2]第九章の「算脱」の問題については，これまでとくに問題とされてこなかった．たとえば,『明治前日本数学史』[3]では，簡単な注釈とともに，原文が列挙されているだけである．本稿ではあえてそれを詳しく検討する．

1 問題と本術

『綴術算経』第七章,『不休綴術』第九章はともに「算脱の術を探る」[4]となっていて，内容はほとんど同じである．

最初に「継子立」の一般的説明があって[5]，その後本題に入る．問題は次の通りである．黒石 1 個と白石 n 個を円形に並べ，黒石から数え始めて，一定の数 m ごとに石を取り除いてゆく．このとき最後に黒石が残る n を決定する方法を求めよ[6]．

本文はまず，$m=2,3,4,5,6$ の場合に，黒石が残る n を列挙している[7]．今それを表にまとめると，次のようになる[8]．ここで，m 番目ごとに取り除くことを m 脱，黒石が残ることを「整」，残らないことを「不整」と呼ぶ．

脱数	整数
2	1, 3, 7, 15, 31
3	3, 5, 8, 30
4	1, 4, 8, 11, 15
5	2, 5, 11, 14, 36
6	1, 2, 7, 13

*OGAWA Tsukane, Yokkaichi University, ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

[1]国立公文書館内閣文庫 23851．以下引用は本書からのものである．

[2]東京大学 T20:74．以下引用は本書のものからである．

[3]日本学士院日本科学史刊行会 (1956)，第二巻，pp. 292-293.

[4]「探算脱術第七」,『綴術算経』24 丁ウラ–27 丁オモテ,『不休綴術』21 丁オモテ–23 丁表．以下引用はすべて同じ．

[5]『綴術算経』24 丁ウラ–25 丁オモテ,『不休綴術』21 丁オモテ．

[6]本文に問題は書かれておらず，割注に「黒子一他ハ皆白個ヲ用」とあるのみである (『綴術算経』25 丁オモテ,『不休綴術』21 丁ウラ)．

[7]『綴術算経』25 丁オモテ,『不休綴術』21 丁ウラ．

[8]例えば，$m=2$ の場合,「二脱ハ白子ヲ止ル事一，三，七，十五，三十一等ニ整フ」とある (『綴術算経』25 丁オモテ,『不休綴術』21 丁ウラ)．ここで,「止（トドム）ル」とは,「絶える」,「尽きる」意．

この実験を省みて,「整う数もあれば，不整の数もある．ある整う数についても，脱数が異なれば，整となる場合も，不整となる場合もある」という[9]．そして,「これを拠り所として本術を会得する」[10]といい，本術が次に述べられる[11]．

> (黒石に擬した) 一を法に置く (実は空である)．法に一，実に脱数をそれぞれ順に加えて行き，実の値が法の値を超えたときは，法の値を減じて行き，もし実が空となったなら，法から一 (最初に黒石に擬した一) を減じて，その余りを正限数とする[12]．

2 本術の正しいこと

白石 n 個 (≥ 1) のときに，黒石に 0，黒石のとなりの白石からに順に時計回りに 1 から n の番号をつける．今，黒石から m 番目ごとに取り除いて行き[13]，最後に残る石の番号を $N_{n+1,m}$ とすると，最初に取り除かれる石は，$\bmod n+1$ で第 $m-1$ 番目である．そこで，次の m 番目の石を 0 番目として数えなおすと，最後に残る石は $N_{n,m}$ である．したがって，最初の黒石から数えると，$N_{n+1,m} \equiv N_{n,m} + m \pmod{n+1}$ である．$n = 0$ のとき (すなわち，黒石 1 個のみの場合) は，明らかにすべての m に対して，$N_{1,m} = 0$ である．よって，

$$N_{1,m} = 0 \tag{1}$$

$$N_{n+1,m} \equiv N_{n,m} + m \pmod{n+1} \tag{2}$$

これより，$N_{n+1,m}$ を求めることができる．たとえば，$m = 5$ の場合，

$$\begin{aligned}
&N_{1,5} = 0,\\
&N_{2,5} \equiv N_{1,5} + 5 = 5 \equiv 1 \pmod 2,\ \text{よって}\ N_{2,5} = 1\\
&N_{3,5} \equiv N_{2,5} + 5 = 6 \equiv 0 \pmod 3,\ \text{よって}\ N_{3,5} = 0\\
&N_{4,5} \equiv N_{3,5} + 5 = 5 \equiv 1 \pmod 4,\ \text{よって}\ N_{4,5} = 1\\
&N_{5,5} \equiv N_{4,5} + 5 = 6 \equiv 1 \pmod 5,\ \text{よって}\ N_{5,5} = 1\\
&N_{6,5} \equiv N_{5,5} + 5 = 6 \equiv 0 \pmod 6,\ \text{よって}\ N_{6,5} = 0\\
&N_{7,5} \equiv N_{6,5} + 5 = 5 \pmod 7,\ \text{よって}\ N_{7,5} = 5\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

というように順に $N_{n+1,5}$ を求めることができる．この計算を表に表せば，

$N_{n+1,5}$	(残る石の番号)	0	1	0	1	1	0	⋯
$n+1$	(石の総数，mod)	1	2	3	4	5	6	⋯
n	(白石の数)	0	1	2	3	4	5	⋯

[9]「其験事ヲ往返シ探ルニ必不整ノ数有リ可整数有リ其可整数ニ於テ亦整不整有ル事ヲ得ル」(『綴術算経』25 丁ウラ).『不休綴術』では「数」が「限」となっている (21 丁ウラ).

[10]「是拠ト成テ本術ヲ会セリ」(Ibid.).

[11]『綴術算経』では「求限本術」,『不休綴術』では単に「本術」という．

[12]「置一 (擬黒子) 於法 (実空也) 法一実脱数各累加之実満法除去之実盡者法減一 (原擬黒子者也) 余為正限数也」(『綴術算経』25 丁ウラ,『不休綴術』21 丁ウラ–21 丁オモテ).

[13]最初の黒石を 1 番目と数える．

となる．この表の上の2段は,「2段目は1ずつ加え，1段目は5ずつ加え2段目の数で mod をとる」ことによって作られる．ここで，最後に黒石が残るのは $N_{n+1,5}=0$ の場合だから，1段目が0となったとき，2段目から1を減じれば，求めるべき白石の個数（正限数）となる[14]．このようにして得られた $n=2,5,\cdots$ ($n=0$ は除く) を表にしたものが前表の脱数5の整数欄である．本術に述べられている操作は，以上の手続きを算盤上の「実」に第1段目を,「法」に第2段目を配置したものとして述べたものである．

3　建部の実際の方法

建部はしかし，以上のように考えたのではない．というのも，建部は最後に次のように述べているからである．

> この算脱は，実験によって多くの数値を得て，その数値を細かく探って，数によって法術を理解したものである．もともと原理はあるといっても，あえてその原理を理解して得たのではない．ただ，その数の表れかたを拠り所として，数より自らの心を導いて，これを理解したのである[15]．

上に述べた考え方はまさに，建部が「もともと原理はあるといっても」というときの「原理」(の一つ）を指している．しかし建部はその術を「原理を理解して得たのではない」というのである[16]．

原文に載せられている実験値だけでははっきりしないのだが，たとえば，$m=5$ の場合の実験をして，その結果を表にすると次のようになる．

$N_{n+1,5}$	0	1	0	1	1	0	5	2	7	2	7	0	5	10	0	5	10	15	1	6
$n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

この表で $n+1=12$ あたりまでではあまり良くわからないが，$n+1=12$ 以降の $N_{n+1,5}$ の数値の並びを見れば，$N_{n+1,5}\equiv N_{n,5}+5 \pmod{n+1}$ であることは一目瞭然であろう．そしてこれが $n+1$ が小さい場合にも成り立つことを確認したに違いない．原文に「その数の表れかたを拠り所として，数より自らの心を導いて，これを理解した」というのは，このことをいうのである．原文に $m=2,3,4,5,6$ の場合の整数 (正限数) があるところからして，多くの数値実験を繰り返して術を推測し，また，その術が実験結果を精確に再現することから，術の妥当性を確信したと思われる．

---

[14]同様の説明が『明治前日本数学史』第二巻，pp. 231–235，にある．そこでは関孝和の『算脱之法，俗曰之継子立』の説明として述べられている．『算脱之法』における術文は次の通り．「置一 (此一擬負) 為原法 (実位先空) 仍法一実脱数各累加之実満法則去之遇実盡而法数内減一余為正限数」

[15]「右算脱ハ類数ヲ設テ砕キ探リ数ニ拠テ法術ヲ会スル者ナリ元来其理ヲ備ル事有ト雖敢理ヲ察シテ得ヘカラス唯其数ノ成処ニシテ数ヨリ自心ヲ導事ヲ得テ是ヲ会スルナリ」(『綴術算経』26丁ウラ–27丁オモテ)．なお,『不休綴術』にはこの部分に相当する記述はない．

[16]建部ともなれば (1) 式，(2) 式に相当する原理を理解していたと考えるのは自然ではあろうが，そのような記述が残っていない以上，断言はできない．

4 原文中の補注について

建部は上の文章の前に，補注として，種々のことを記している．以下それを列挙すれば，次の五項となる[17]．

(1) 算脱の術は (建部の) 兄，建部賢明による．賢明は天賦の才は関孝和につぎ，生まれつき気が弱く，病弱であった[18]．

(2) 五斜の括術において，万位の桁になろうとも，日に百位を計算すれば，百日で完成するといい，実際一月ほどで計算し終えた．賢明の没後，このことを振り返り，まさにその通りだと思った[19]．

(3) 黄赤道の数表に必要な元数を十日ほどで計算して，中根元圭に授けたのは (建部)57歳の時であった[20]．

(4) 建部は若い頃，明暦天正の気朔転交の分数をもって積年を計算したが，桁数が多く困難だった．今では歳もとり，気も半ばなくなったが，かえって桁数の多い数を求め，それを用いることは，元気だったときの倍になった．これを難しいと思わないのは，数学がわたしに向いているからであろう[21]．

(5) 数値を求めるのであれ，術を施すのであれ，法則を探るのであれ，難しいと思うのは，心に真実に従わないところがあり，真実があらわれていないからである．この心が真実に従っているか，従っていないかを本当に知っていたのが賢明であった．鋭い思慮によるのでもなく，旺盛な気によるのでもなく，安泰として，休まず事をなすのは，柔が剛堅を打ち砕き，少が多を思量する力に他ならない[22]．

これらは建部の兄賢明への追悼の意を表すと同時に，多数の数値実験により術を求める方法が自然であることを強調するものでもある．賢明は病弱で気[23]が弱かったが，それにも関わらず膨大な計算をし ((2))，建部自身も 57 歳になってから膨大な暦計算をした ((3))．また，建部は若い頃も計算をしたが，歳を取ってからもなおさら多くの計算をした ((4))．これらは，鋭い思慮によらずとも，あるいは気が弱くとも，多くの計算をたゆまず実行することにより，真実を明らかにすることができることを強調するものである ((5))．鋭い思慮，旺盛な気による方法（それがあるとして）と対比したとき，この計算に基づく方法

---

[17] これらは一段落として (一文字下げて) 記されている．

[18] 「算脱ノ術ハ兄賢明カ探会スル所ナリ賢明カ生知孝和に亜リ其稟受ノ気情最怯弱ニシテ常ニ病日多カリシ」(『綴術算経』25 丁ウラ).『不休綴術』22 丁オモテもほぼ同じ．

[19] 「五斜ノ括術ヲ為ント欲シテ甚繁雑セリタトヒ萬位ニ及フトモ日ニ百位ヲ造ハ百日ニシテ畢ラント言テ果テ月余ニシテ悉成シ得タリ賢明没シテ後吾彼成得タルヲ意テ始テ実ニ肯スル事ヲ得タリ」(『綴術算経』25 丁ウラ–26 丁オモテ).『不休綴術』22 丁オモテもほぼ同じ．

[20] 「旬日ナラスシテ黄赤道立成ノ元数ヲ求得テ中根上右衛門ニ授ク時ニ五十七歳ナリキ」(『綴術算経』26 丁オモテ).『不休綴術』22 丁オモテもほぼ同じ．

[21] 「亦吾少カリシ時所問有テ宣明暦天正気朔転交四件ノ分数ヲ以テ積年ヲ求ル段数ヲ為畢テ以為多位ニシテ最難為者ト若今既ニ齢傾キ情気徐一半ヲ損スルニ逮テ却テ許多ノ数ヲ求メカヲ用ル事壮ナリシ時ニ倍セリ而ルニ難シト不為ハ是算ノ実ニ我心ニ従ユヘナリ」(『綴術算経』26 丁オモテ–26 丁ウラ).『不休綴術』22 丁オモテ–22 丁ウラもほぼ同じ．

[22] 「凡求数ニモアレ施術ニモアレ探法ニモアレ総テ一些モ難シト意事有ハ心ニ不従所有テ真実ノ不至ニ依レリ其心ニ従フト不従トノ意ノ実ヲ識者ハ賢明乎夫思慮の慧利ナルニ依ル事無ク亦気情ノ壮盛ナルヲ用ル事無ク泰ニ居テ常ニ為テ不止者ハ即柔ヲ以テ剛堅を砕キ寡ヲ以テ衆多ヲ量ルノカナリ」(『綴術算経』26 丁ウラ).『不休綴術』22 丁ウラ–23 丁オモテもほぼ同じ.『不休綴術』にはこの後に「学フ者実ニ得テ知スンハ敢テ綴術ノ本旨ヲ理解スヘカラス」とある (23 丁オモテ)．この部分は『綴術算経』にはない．

[23] 気というのは儒学における概念である．建部は明らかに儒学の範疇において，その数学観を披瀝してい

は，いわば柔が剛堅を打ち砕き，少ない思慮と気が多くの真実を思量するという力を秘めている．

この「探算脱術第七」は，次の「探求球面積術第八」はともに，数に依り術を探る方法の例として取り上げられている.「探求球面積術第八」では多くの計算を実行して，球の表面積を求め，その数値の中に円周率を表す数字の列が現われていることを見て，球の表面積を求める公式を導いている．してみれば，(1)–(5) までの補注は，これに続く原文最後の趣旨[24]を補強するものということもできよう．

[24]前節の引用を見よ．